Définitions et représentations graphiques

Définitions :

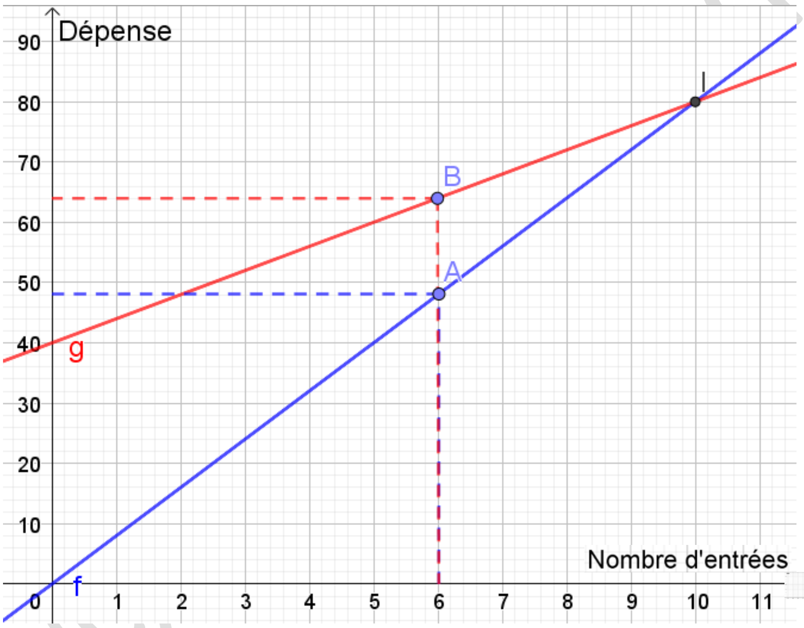
- Une fonction affine f est une fonction qui, à un nombre x fait correspondre le nombre $a \times x + b$, où a et b sont des nombres donnés. On la note : $f(x) = ax + b$
- Une fonction linéaire f est une fonction qui, à un nombre x fait correspondre le nombre $a \times x$, où a est un nombre donné. On la note : $f(x) = ax$

Remarques :

- Une fonction linéaire est une fonction affine où b = 0.
- Si a = 0, on obtient une fonction constante (qui ne varie donc jamais …)
- On reconnait algébriquement une fonction grâce à sa forme développée et réduite.

Propriétés des représentations graphiques :

- Toute fonction affine est représentée par une droite.
  Les coordonnées $(x\,;y)$ d'un point M appartenant à cette droite vérifient $y = ax + b$.
- Une fonction linéaire est représentée par une droite passant par l'origine. (Ainsi, une fonction linéaire décrit donc une situation de proportionnalité)



Exemple :
La fonction g ci-contre est une fonction affine.
La fonction f ci-contre est une fonction linéaire.
f(x) = g(x) correspond au point d'intersection I.

Méthode n°1 : Expressions algébriques : fonctions affines ou pas ?
Voici plusieurs expressions de fonctions. Dans chaque cas, dire s'il s'agit d'une fonction linéaire, ou affine, ou encore ni l'un ni l'autre ?

$g(x) = 7x$ $\quad\quad$ $h(x) = 5(x-2)$ $\quad\quad$ $d(x) = x(x+2)$

Correction :
g est donc fonction linéaire avec a = 7.

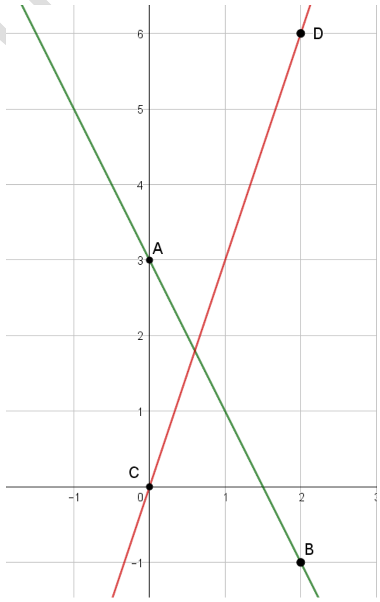
Afin de pouvoir conclure pour les fonctions h et d, il faut transformer les expressions sous leur forme développée et réduite.

$h(x) = 5(x-2)$
$h(x) = 5 \times x + 5 \times (-2)$
$h(x) = 5x - 10$
h est en fait une fonction affine avec a = 5 et b = −10.

$d(x) = x(x+2)$
$d(x) = x \times x + x \times 2$
$d(x) = x^2 + 2x$
d n'est ni une fonction affine ni fonction linéaire.

Méthode n°2 : Tracer la représentation graphique d'une fonction affine.
Représenter graphiquement les fonctions suivantes : $f(x) = -2x + 3$ et $g(x) = 3x$.

Correction :
f est une fonction affine, elle est donc représentée par une droite (d).
On calcule deux images : f(0) = −2 × 0 + 3 = 3
et f(2) = −2 × 2 + 3 = −4 + 3 = −1
Donc la droite (d) passe par le point A de coordonnées (0 ; 3) et le point B de coordonnées (2 ; −1). Il reste à tracer la droite passant par A et B.



g est une fonction linéaire, elle est donc représentée par une droite (d) passant par l'origine du repère.
On calcule une image : $g(2) = 3 \times 2 = 6$.
Donc la droite (d') passe par le point C de coordonnées (0 ; 0) et le point D de coordonnées (2 ; 6). Il reste à tracer la droite passant par C et D.

Méthode n°3 : Déterminer par le calcul une image, ou un antécédent.
On considère la fonction p définie par : $f : x \mapsto 3x - 5$
1. Calculer l'image de $\frac{2}{7}$ par la fonction f.
2. Déterminer un antécédent de 9 par cette fonction f.

Correction :

1) $f(\frac{2}{7}) = 3 \times \frac{2}{7} - 5$
$f(\frac{2}{7}) = \frac{6}{7} - 5$
$f(\frac{2}{7}) = \frac{6}{7} - \frac{35}{7}$
$f(\frac{2}{7}) = \frac{6-35}{7}$
$f(\frac{2}{7}) = -\frac{29}{7}$
L'image de $\frac{2}{7}$ par la fonction f est $-\frac{29}{7}$.

2) Déterminer un antécédent de 9 par cette fonction f revient à chercher un nombre x tel que $f(x) = 9$.
$f(x) = 9$
$3x - 5 = 9$
$3x - 5 + 5 = 9 + 5$
$3x = 14$
$3x \div 3 = 14 \div 3$
$x = \frac{14}{3}$
L'antécédent de 9 par cette fonction f est $\frac{14}{3}$.

Méthode n°4 : Vérifier si un point est sur une droite.

Soit *(d)* la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = x - 1$.

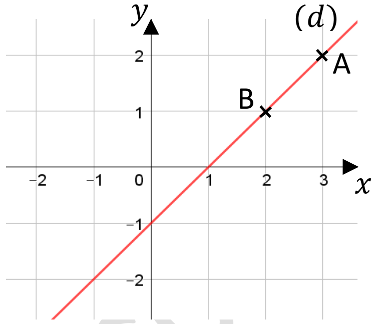
Les points A(3 ; 2) et C($\frac{9}{2}$; 1) appartiennent-ils à la droite *(d)* ?

Correction :

Les coordonnées (*x* ; *y*) d'un point M appartenant à la droite *(d)* vérifient *y* = *x* – 1.

3 – 1 = 2 donc A ∈ *(d)*

$\frac{9}{2}$ – 1 ≠ 1 donc C ∉ *(d)*



Méthode n°5 : Expressions algébriques : fonctions affines ou pas ?

Voici plusieurs expressions de fonctions. Dans chaque cas, dire s'il s'agit d'une fonction linéaire, ou affine, ou encore ni l'un ni l'autre ?

$f(x) = 5x - 12$ $\qquad$ $d(x) = (x - 3)(x + 2) - x^2$

Correction :

f est donc fonction affine avec a = 5 et b = –12.

Afin de pouvoir conclure pour la fonction d, il faut transformer les expressions sous leur forme développée et réduite.

$d(x) = (x - 3)(x + 2) - x^2$

$d(x) = x \times x + x \times 2 - 3 \times x + (-3) \times 2 - x^2$

$d(x) = x^2 + 2x - 3x - 6 - x^2$

$d(x) = -x - 6$

d est en fait une fonction affine avec a = –1 et b = –6.