

# Comprendre comment la décomposition en facteurs premiers permet de simplifier les fractions

## a) Nombres premiers

Définition : Un nombre est premier s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

- Cette liste est infinie.
- Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

## b) Décomposition d'un nombre en produits de facteurs premiers

Propriété : Tout nombre non premier peut se décomposer en produit de facteurs premiers.

Exemple : Comment décomposer 84 en produits de facteurs premiers ?

C'est fini, on trouve **1** !

La décomposition en facteurs premiers de 84 se lit dans la colonne de droite.

$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

Application : Décomposer 300 en produits de facteurs premiers.

Correction :

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$$

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

## c) Nombres sont dit premiers entre eux

Définition : Deux nombres sont dit premiers entre eux lorsqu'ils n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

Exemple : Comment savoir si deux nombres sont premiers entre eux ?

Liste des diviseurs de 16 : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16.

Liste des diviseurs de 15 : 1 ; 3 ; 5 ; 15.

16 et 15 sont premiers entre eux car ils n'ont pas d'autre diviseur commun autre que 1.

Application : Sans calcul expliquez pourquoi 75 230 et 2 895 ne sont pas premiers entre eux ?

Correction : Ils ne sont pas premiers entre eux car ils sont multiples de 5.

#### d) Application aux fractions

Définition : On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Autrement dit : Une fraction est irréductible ne peut pas être « simplifiée ».

Exemple : Comment rendre irréductible la fraction  $\frac{60}{126}$  ?

- Décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers

60	2	126	2
30	2	63	3
15	3	21	3
5	5	7	7
1		1	

- On a ainsi les décompositions de 60 et 126 :  $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$  et  $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

- On a :  $\frac{60}{126} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$

10 et 21 sont premiers entre eux, donc :  $\frac{10}{21}$  est la fraction irréductible égale à  $\frac{60}{126}$ .

Application : Simplifier la fraction  $\frac{153}{85}$ .

Correction : Pour simplifier une fraction, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

153	3	85	5
51	3	17	17
17	17	1	
1			

On a ainsi les décompositions de 153 et 85 :

$$153 = 3 \times 3 \times 17 \quad \text{et} \quad 85 = 5 \times 17$$

$$\text{Donc : } \frac{153}{85} = \frac{3 \times 3 \times 17}{5 \times 17} = \frac{3 \times 3}{5} = \frac{9}{5}.$$