

Comprendre comment la décomposition en facteurs premiers permet de simplifier les fractions

a) Nombres premiers

Définition : Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

- Cette liste est infinie.
- Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

b) Décomposition d'un nombre en produits de facteurs premiers

Propriété : Tout nombre non premier peut se décomposer en produit de facteurs premiers.

Exemple : Comment décomposer 84 en produits de facteurs premiers ?

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

C'est fini, on trouve **1** !

La décomposition en facteurs premiers de 84 se lit dans la colonne de droite.

$$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$$

Application : Décomposer 300 en produits de facteurs premiers.

Correction :

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$$

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

c) Nombres sont dit premiers entre eux

Définition : Deux nombres sont dit premiers entre eux lorsqu'ils n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

Exemple : Comment savoir si deux nombres sont premiers entre eux ?

Liste des diviseurs de 16 : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16.

Liste des diviseurs de 15 : 1 ; 3 ; 5 ; 15.

16 et 15 sont premiers entre eux car ils n'ont pas d'autre diviseur commun autre que 1.

Application : Sans calcul expliquez pourquoi 75 230 et 2 895 ne sont pas premiers entre eux ?

Correction : Ils ne sont pas premiers entre eux car ils sont multiples de 5.

d) Application aux fractions

Définition : On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Autrement dit : Une fraction est irréductible ne peut pas être « simplifiée ».

Exemple : Comment rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$?

- Décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers

$$\begin{array}{l|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

- On a ainsi les décompositions de 60 et 126 : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ et $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7$

- On a : $\frac{60}{126} = \frac{2 \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times 7} = \frac{2 \times 5}{3 \times 7} = \frac{10}{21}$

10 et 21 sont premiers entre eux, donc : $\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$.

Application : Simplifier la fraction $\frac{153}{85}$.

Correction : Pour simplifier une fraction, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

$$\begin{array}{l|l} 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l|l} 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

On a ainsi les décompositions de 153 et 85 :

$$153 = 3 \times 3 \times 17 \quad \text{et} \quad 85 = 5 \times 17$$

Donc : $\frac{153}{85} = \frac{3 \times 3 \times \cancel{17}}{5 \times \cancel{17}} = \frac{3 \times 3}{5} = \frac{9}{5}$

© www.lecafedesmaths.com

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle,
autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle,
ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.