Définitions et représentations graphiques

Définitions :

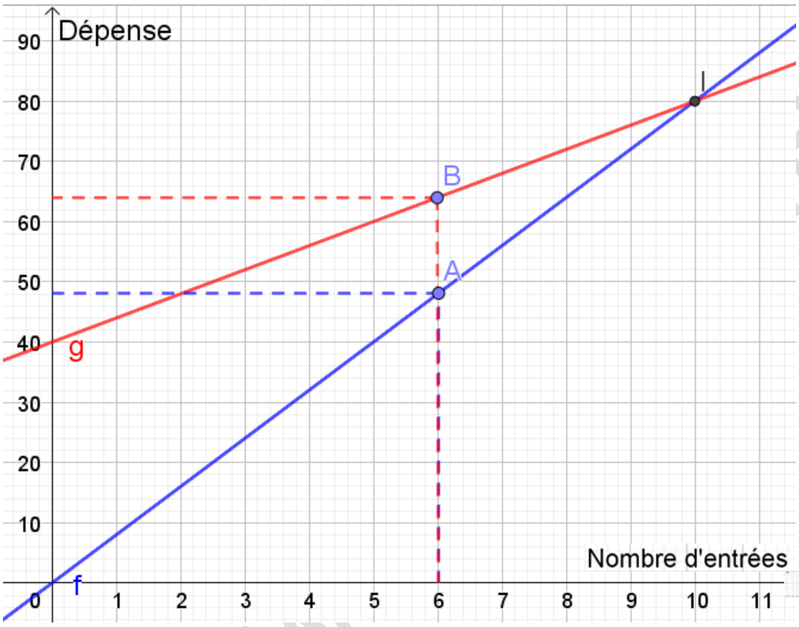
- Une fonction affine f est une fonction qui, à un nombre x fait correspondre le nombre $a \times x + b$, où a et b sont des nombres donnés. On la note : $f(x) = ax + b$
- Une fonction linéaire f est une fonction qui, à un nombre x fait correspondre le nombre $a \times x$, où a est un nombre donné. On la note : $f(x) = ax$

Remarques :

- Une fonction linéaire est une fonction affine où b = 0.
- Si a = 0, on obtient une fonction constante (qui ne varie donc jamais …)
- On reconnait algébriquement une fonction grâce à sa forme développée et réduite.

Propriétés des représentations graphiques :

- Toute fonction affine est représentée par une droite.
  Les coordonnées $(x\,;y)$ d'un point M appartenant à cette droite vérifient $y = ax + b$.
- Une fonction linéaire est représentée par une droite passant par l'origine. (Ainsi, une fonction linéaire décrit donc une situation de proportionnalité)



Exemple :
La fonction g ci-contre est une fonction affine.
La fonction f ci-contre est une fonction linéaire.
f(x) = g(x) correspond au point d'intersection I.

Méthode n°1 : Expressions algébriques : fonctions affines ou pas ?

Voici plusieurs expressions de fonctions. Dans chaque cas, dire s'il s'agit d'une fonction linéaire, ou affine, ou encore ni l'un ni l'autre ?

$f(x) = 5x - 12$ $\qquad g(x) = 7x$ $\qquad h(x) = 5x(x-2)$ $\qquad d(x) = (x-3)(x+2) - x^2$

Correction :

f est donc fonction affine avec a = 5 et b = −12.
g est donc fonction linéaire avec a = 7.

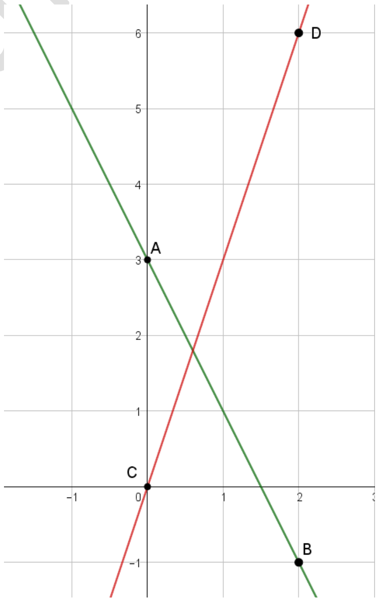
Afin de pouvoir conclure pour les fonctions h et d, il faut transformer les expressions sous leur forme développée et réduite.

$h(x) = 5x(x-2)$
$h(x) = 5x \times x + 5x \times (-2)$
$h(x) = 5x^2 - 10x$
$h(x) = 5x^2 - 10x$
h n'est ni une fonction affine ni fonction linéaire.

$d(x) = (x-3)(x+2) - x^2$
$d(x) = x \times x + x \times 2 - 3 \times x + (-3) \times 2 - x^2$
$d(x) = x^2 + 2x - 3x - 6 - x^2$
$d(x) = -x - 6$
d est en fait une fonction affine avec a = −1 et b = −6.

Méthode n°2 : Tracer la représentation graphique d'une fonction affine.

Représenter graphiquement les fonctions suivantes : $f(x) = -2x + 3$ et $g(x) = 3x$.



Correction :

f est une fonction affine, elle est donc représentée par une droite (d).
On calcule deux images : f(0) = −2 × 0 + 3 = 3
et f(2) = −2 × 2 + 3 = −4 + 3 = −1
Donc la droite (d) passe par le point A de coordonnées (0 ; 3) et le point B de coordonnées (2 ; −1). Il reste à tracer la droite passant par A et B.

g est une fonction linéaire, elle est donc représentée par une droite (d) passant par l'origine du repère.
On calcule une image : $g(2) = 3 \times 2 = 6$.
Donc la droite (d') passe par le point C de coordonnées (0 ; 0) et le point D de coordonnées (2 ; 6). Il reste à tracer la droite passant par C et D.

Méthode n°3 : Déterminer par le calcul une image, ou un antécédent.

On considère la fonction p définie par : $f : x \mapsto 3x - 5$

1. Calculer l'image de $\frac{2}{7}$ par la fonction f.
2. Déterminer un antécédent de 9 par cette fonction f.

Correction :

1) $f(\frac{2}{7}) = 3 \times \frac{2}{7} - 5$
$f(\frac{2}{7}) = \frac{6}{7} - 5$
$f(\frac{2}{7}) = \frac{6}{7} - \frac{35}{7}$
$f(\frac{2}{7}) = \frac{6-35}{7}$
$f(\frac{2}{7}) = -\frac{29}{7}$
L'image de $\frac{2}{7}$ par la fonction f est $-\frac{29}{7}$.

2) Déterminer un antécédent de 9 par cette fonction f revient à chercher un nombre x tel que $f(x) = 9$.

$$f(x) = 9$$
$$3x - 5 = 9$$
$$3x - 5 + 5 = 9 + 5$$
$$3x = 14$$
$$3x \div 3 = 14 \div 3$$
$$x = \frac{14}{3}$$

L'antécédent de 9 par cette fonction f est $\frac{14}{3}$.

Méthode n°4 : Vérifier si un point est sur une droite.

Soit *(d)* la représentation graphique de la fonction affine $f(x) = x - 1$.

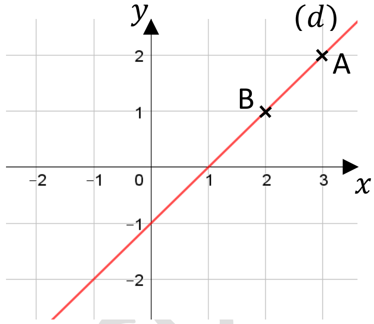
Les points A(3 ; 2) et C($\frac{9}{2}$; 1) appartiennent-ils à la droite *(d)* ?

Correction :

Les coordonnées (x ; y) d'un point M appartenant à la droite *(d)* vérifient $y = x - 1$.

$3 - 1 = 2$ donc A $\in$ *(d)*

$\frac{9}{2} - 1 \neq 1$ donc C $\notin$ *(d)*



Fiche d'exercices n°1

3 g est la fonction affine définie par :

$$g(x) = 4x + 3.$$

1. Calculer l'image par g de :

a. 2 **b.** 0 **c.** -8

2. Déterminer l'antécédent par g de :

a. 0 **b.** 9 **c.** -1

Correction :

3 **1. a.** $g(2) = 4 \times 2 + 3 = 8 + 3 = 11$
L'image de 2 par g est 11.

b. $g(0) = 4 \times 0 + 3 = 0 + 3 = 3$
L'image de 0 par g est 3.

c. $g(-8) = 4 \times (-8) + 3 = -32 + 3 = -29$
L'image de -8 par g est -29.

2. a. On cherche un nombre x tel que $g(x) = 0$, c'est-à-dire tel que $4x + 3 = 0$,

25 g est la fonction $x \mapsto \frac{4-3x}{5}$.

a. Recopier et compléter : $g(x) = \frac{\dots}{5} - \frac{\dots}{5}x$.

b. En déduire que la fonction g est une fonction affine dont on précisera les coefficients.

Correction :

25 **a.** $g(x) = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}x$

b. g est une fonction affine avec $a = -\frac{3}{5}$ et $b = \frac{4}{5}$.

Entraînement supplémentaire facultatif :

- https://mathenpoche.sesamath.net/?page=troisieme#troisieme_2_3_6