Résolution de problèmes.

Application n°1 : On dispose de deux rubans de tissu, l'un rouge, de longueur 630 cm, et l'autre, noir de longueur 270 cm. On souhaite les couper en morceaux de longueur égale, le plus grand possible, sans avoir de chute. Calculer la longueur des morceaux de ruban obtenus et le nombre total de morceaux.

Correction :
Nombre qui divise 630 ?
Nombre qui divise 270 ?
On cherche un diviseur commun à 630 et à 270, qui soit le plus grand possible.

Première méthode :

Longueur d'un morceau qui divise 630 : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 14, 15, 18, 21, 30, 35, 42, 45, 63, 70, 90, 105, 126, 210, 315, 630.
Longueur d'un morceau qui divise 270 : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 15 ; 18 ; 27 ; 30 ; 45 ; 54 ; 90 ; 135 ; 270.
On cherche un diviseur commun à 630 et à 270, qui soit le plus grand possible : 18
Cela peut être FASTIDIEUX suivant les cas de figures

Deuxième méthode :
Modélisation : On souhaite trouver le plus grand nombre de morceaux possibles, de longueur égale, sans avoir de chute et le nombre total de morceaux.
Cela revient à chercher le plus grand diviseur commun à 630 et 270.

On décompose 630 et 270 en en produits de facteurs premiers avec la calculatrice, on obtient :
$630 = 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7$
$270 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$

On remarque que le produit $2 \times 3 \times 3 \times 5$ est présent dans les deux décompositions.
Donc, $2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$ est le plus grand diviseur commun à 630 et 270.
La longueur d'un morceau de ruban est donc égale à 90 cm.
$630 \div 90 = 7$
$270 \div 90 = 3$
donc au total, 10 morceaux de ruban.

Vocabulaire : On appelle PGCD de a et b le **P**lus **G**rand **D**iviseur **C**ommun de a et b.

On peut aussi :
En rendant irréductible la fraction $\frac{630}{270}$ on obtient $\frac{630}{270} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 7}{\cancel{2} \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{5}} = \frac{7}{3}$
On remarque qu'au numérateur et au dénominateur, on a barré : $2 \times 3 \times 3 \times 5$ donc le PGCD est de 90
Et 7+3=10 morceaux de ruban.

Application n°2 : Deux ampoules A et B clignotent. L'une (A) s'allume toutes les 153 secondes et l'autre (B) toutes les 187 secondes.
A minuit, elles s'allument ensemble.
A quelle heure s'allumeront-elles de nouveau ensemble ?

Correction :
Modélisation : L'ampoule A va s'allumer de nouveau dans 2×153 s, ou 3×153s, etc., c'est à dire dans un temps égal à un multiple de 153 s. De même, l'ampoule B s'allumera de nouveau sur un multiple de 187 s…
Il faut donc trouver le plus petit multiple commun à 153 et 187.

Résolution :
Pour le trouver, utilisons la décomposition en facteurs premiers. Avec la calculatrice, on obtient :
153 = 3×3×17
187 = 11×17
Le plus petit multiple commun doit contenir les diviseurs de chacun :
Le nombre cherché est donc : 3×3×11×17 = 1683 s.
Ces ampoules s'allumeront de nouveau ensemble au bout de 1 683 s, soit à 0 h 28 min 3 s.

Vocabulaire : On appelle **PPCM de a et b** le **P**lus **P**etit **M**ultiple **C**ommun de a et b.

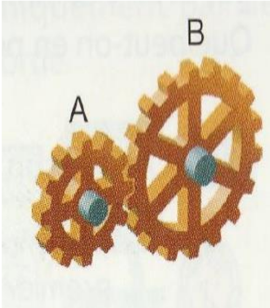
Application n°3 : Lors des vacances scolaires, un centre de loisirs reçoit 270 filles et 252 garçons. Le responsable du centre souhaite constituer des groupes équilibrés :

- Le même nombre de filles dans chaque groupe ;
- Le même nombre de garçons dans chaque groupe ;
- Et, bien sûr, tous les inscrits doivent tous appartenir à un groupe.

Quel nombre maximal de groupes pourra-t-il réaliser ?
Combien y aura-t-il de filles et de garçons dans chaque groupe ?

Correction :
Modélisation : On souhaite trouver le plus grand nombre de groupes possibles permettant de partager équitablement les filles et les garçons. Cela revient à chercher le plus grand diviseur commun à 252 et 270.

Résolution :
Pour le trouver, utilisons la décomposition en facteurs premiers. Avec la calculatrice, on obtient :
270 = $2 \times 3^3 \times 5$
252 = $2^2 \times 3^2 \times 7$
On remarque que le produit $2 \times 3 \times 3$ est présent dans les deux décompositions.
Donc, $2 \times 3 \times 3 = 18$ est le plus grand diviseur commun à 270 et 252.
270÷18 = 15 filles
252÷18 = 14 garçons
Le responsable du centre pourra donc effectuer 18 groupes contenant chacun 15 filles et 14 garçons.



Application n°4 : Dans cet exercice, on indiquera les calculs effectués avec la calculatrice, mais le détail de ces calculs n'est pas demandé. Une roue d'engrenage A a 12 dents. Elle est en contact avec une roue B de 18 dents.

1. Combien de tours aura fait la roue B :
   a. si la roue A a fait 9 tours ?
   b. si la roue A a fait 13 tours ?
2. Pour se repérer, on marque par deux points la position des roues A et B au départ. Au bout de combien de tours de chacune des roues seront-elles de nouveau et pour la première fois, dans la même position.

Correction :

1. a. Quand la roue A fait 9 tours, alors les roues A et B ont tourné de 9×12 = 108 dents. Comme la roue B a 18 dents, elle a réalisé 108 ÷ 18 = 6 tours complets.
   b. Si la roue A fait 13 tours, alors les roues A et B ont tourné de 13×12 = 156 dents. Comme la roue B a 18 dents, elle a réalisé 156 ÷ 18 = $\frac{26}{3}$ = 8 + $\frac{2}{3}$ tours.
   La roue B a donc réalisé 8 tours complets et les deux tiers d'un autre tour.

2. Modélisation : Les deux roues se retrouveront dans la même position quand elles auront fait un nombre entier de tours, qui doit correspondre à un multiple de 12 dents pour la roue A et de 18 dents pour la roue B. Cherchons donc le plus petit multiple commun à 12 et 18.

Résolution :

Pour le trouver, utilisons la décomposition en facteurs premiers. Avec la calculatrice, on obtient :

12 = 2×2×3

18 = 2×3×3

Le plus petit multiple commun doit contenir les diviseurs de chacun, soit 2×2×3×3 = 36 dents.

36÷12 = 3 tours pour A

36÷18 = 2 tours pour B

Les roues occuperont donc à nouveau la même position pour la première fois au bout de 3 tours pour A et 2 tours pour B.