Reconnaître un multiple ou un diviseur (Rappels)

Exemple : 48 est divisible par 6 / 48 est un multiple de 6 / 6 est un diviseur de 48 car : « 48 est dans la table de 6 » / « $48 = 6 \times 8$ » / « $48 \div 6 = 8$ qui est un nombre entier »

Contre-exemple : 38 n'est pas divisible par 7 car $38 \div 7 \approx 5,42\ldots$ n'est pas un nombre entier.

Critères de divisibilité : Un nombre entier est :

- divisible par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- divisible par 3 si la somme de ces chiffres est divisible par 3 ;
- divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- divisible par 9 si la somme de ces chiffres est divisible par 9 ;
- divisible par 10 si son chiffre des unités est 0.

Application n°1 : Baptiste collectionne des petits soldats : il en a déjà 72.
Pour bien présenter son armée de petits soldats, il souhaite les disposer en rangées parallèles contenant le même nombre de petits soldats et de façon qu'il n'en reste bien sûr aucun.
Combien y-a-t-il de dispositions possibles pour ces 72 petits soldats.

Correction :

- Modélisation : Le problème revient en fait à déterminer le nombre de rangées possibles, qui doit diviser 72 puisqu'il ne doit en rester aucun. Ceci revient donc à chercher tous les diviseurs de 72.
- Résolution : Les dispositions possibles sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.
  Comme pour chaque décomposition, il y a deux possibilités d'organiser l'armée (soit 8 rangées de 9, soit 9 rangées de 8…), il y a, au total, 12 dispositions possibles de ces 72 petits soldats.

Application n°2 : Parmi les codes à quatre chiffres 4850, 3564, 4590 et 2205, y-a-t-il un nombre pair divisible à la fois par 5, 9 et 17 ?

Correction : Les nombres pairs sont 4850, 3564 et 4590 car ils se terminent par 0, 2, 4, 6 ou 8.
Parmi ces nombres, ceux qui sont divisibles par 5 sont 4850 et 4590.
Comme $4+8+5+0=17$ et $4+5+9+0 = 18$, 4590 est le seul nombre pair divisible par 2, 5 et 9.
Il ne reste plus qu'à vérifier qu'il est bien divisible par 17 :
$4\,590 \div 17 = 270$ et 270 est bien un nombre entier.
Le code 4590 est donc le seul nombre pair divisible à la fois par 5, 9 et 17.

Application n°3 : Montrer que, si deux nombres entiers sont des multiples de 9, alors leur somme est également un multiple de 9.

Correction :

- Recherche : Après plusieurs essais, il semble que la propriété soit toujours vraie, pour n'importe quels nombres multiples de 9.
- Démonstration : Utilisons des lettres pour montrer que la propriété est vraie pour n'importe quel nombre multiple de 9.
  Soit n et m deux entiers qui sont multiples de 9, alors il existe deux entiers q et p tels que : $n = 9q$ et $m = 9p$.
  La somme de n et de m est alors : $n+m = 9q+9p = 9(q+p)$ (voir distributivité simple en 4e)
  Autrement dit, 9 divise bien aussi la somme $n + m$ puisque $(q+p)$ est aussi un entier…
  On a donc bien démontré que, pour n'importe quels nombres multiples de 9, leur somme sera aussi un multiple de 9.

A savoir *: Pour effectuer ce type de démonstration (cf. application 3), il faut connaître les écritures littérales qui permettent d'écrire des types de nombres :*
Nombre pair : 2k — Nombre impair : 2p+1 — Multiple de 7 : 7q — où k, p et q sont des nombres entiers