Préambule

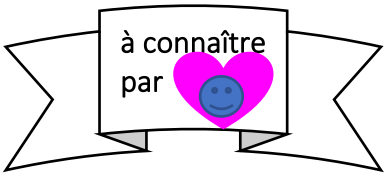
Rappel : la signification de divisible en mathématiques. En résumé : « Nombre qui peut être divisé exactement par un autre. »

- ***Quels sont les nombres n'ayant aucun diviseur ?*** *Il n'en existe pas (tous les nombres entiers peuvent être divisé)*
- ***Quels sont les nombres ayant une infinité de diviseur ?*** *Il n'y a que 0 (il peut être divisé par n'importe quel nombre entier, sauf lui-même). Attention : on ne peut pas diviser PAR 0. MAIS on peut toujours diviser 0 (ex: 0÷1 = 0 ; 0÷2 = 0 ; 0÷3 = 0 ; ...)*
- ***Quels sont les nombres ayant un seul diviseur ?*** *Il n'y a que 1 (qui n'est divisible que par lui-même)*
- ***Quels sont les nombres ayant 2 diviseurs exactement ?*** *On les appelle les nombres premiers, ils sont divisibles par 1 et par eux-mêmes.*
- ***Quels sont les nombres ayant plus de 2 diviseurs ?*** *Tous les autres, donc ceux qui ne sont ni 1, ni premiers.*
- ***Quels sont les nombres ayant un nombre impair de diviseurs ?*** *Les carrés entiers, c'est à dire "ceux de la diagonale dans les tables de multiplication". 1 ; 2 ; 4 ; 9 ; 16 ; ... (à apprendre par cœur jusqu'à 15x15).*
  Explication : Seuls les carrés ont un nombre impair de diviseurs. Cela vient du fait que si n est un nombre quelconque et a un diviseur de n, alors, il existe un entier b tel que : n = axb. Donc, b est aussi diviseur.
  Conclusion : les diviseurs vont par deux sauf si a = b. Ce dernier cas donne : n = a^2. Exemple : Diviseurs de 36 : 1, 2, 3, 4, 9, 6, 12, 18, 36 soit neuf diviseurs.
- ***Quels sont les nombres ayant un nombre pair de diviseurs ?*** *Tous les autres, c'est à dire ni 0, ni les carrés*

Décomposition et fractions irréductibles (Rappels)

Définition : Un **nombre premier** est un nombre entier qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Exemples : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97… Cette liste est infinie.



Propriété : (admise)
Si un nombre entier supérieur ou égal à 2 n'est pas un nombre premier, alors on peut toujours le décomposer en produit de facteurs premiers.

Exemples : 30 = 2 x 3 x 5 est une décomposition du nombre 30 en produits de facteurs premiers.
En effet, chaque facteur de la décomposition est un nombre premier.
385 = 5 x 7 x 11
441 = 3 x 3 x 7 x 7

Application n°1 : Décomposer en produits de facteurs premiers les nombres suivants.
a. 300 b. 345 c. 10 812

Correction : Pour le faire, il est important de bien connaître le début de la liste des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, …

On commence par tester si **300** est divisible par **2** (1er nombre premier).
La réponse est « oui » car **300** se termine par un chiffre pair.
Et on a : **300 : 2** = 150

300	2
150	

On recommence, en testant si **150** est divisible par **2**.
La réponse est « oui » et **150 : 2** = 75

300	2
150	2
75	

On recommence, en testant si **75** est divisible par 2.
La réponse est « non » !
On teste alors le nombre premier suivant dans la liste.
Est-ce que **75** est divisible par **3**.
La réponse est « oui » car 7+5=12 est divisible par 3.
Et on a : **75 : 3** = 25

300	2
150	2
75	3
25	

On recommence, en testant si **25** est divisible par 3.
La réponse est « non » !
On teste alors le nombre premier suivant dans la liste.
Est-ce que **25** est divisible par **5**.
La réponse est « oui » et on a **25 : 5** = 5.

300	2
150	2
75	3
25	5
5	

On recommence, en testant si **5** est divisible par **5**.
La réponse est « oui » et on a **5 : 5** = 1.

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

C'est fini, on trouve **1** !

La décomposition en facteurs premiers de 300 se lit dans la colonne de droite.

$300 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$

$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

b.

345	3
115	5
23	23
1	

$345 = 3 \times 5 \times 23$

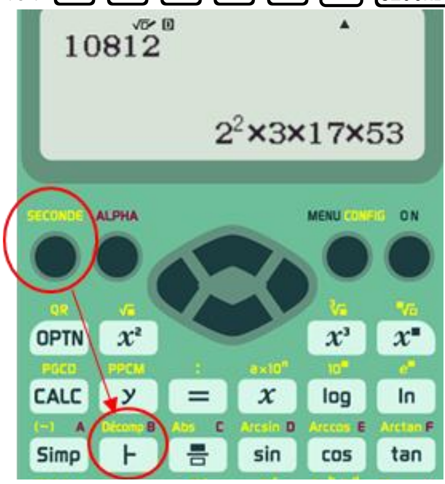
c.

10 812	2
5 406	2
2 703	3
901	17
53	53
1	

$10\,812 = 2 \times 2 \times 3 \times 17 \times 53$

Avec la calculatrice :

On écrit : 1 0 8 1 2 EXE SECONDE ⊢



Définition : Deux nombres sont dit premiers entre eux lorsqu'ils n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

Application n°3.2 : Sans calcul expliquez pourquoi 75 230 et 2 895 ne sont pas premiers entre eux ?
Correction de l'application n°3.2 : Ils ne sont pas premiers entre eux car ils sont multiples de 5.

Définition : On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Autrement dit : Une fraction est irréductible ne peut pas être « simplifiée ».

Application n°3.3 : Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$.

Correction de l'application n°3.3 :

- Décomposer le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

- On a ainsi les décompositions de 60 et 126 : 60 = 2 x 2 x 3 x 5 et 126 = 2 x 3 x 3 x 7
- On a : $\frac{60}{126} = \frac{2\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times5}{\cancel{2}\times\cancel{3}\times3\times7} = \frac{2\times5}{3\times7} = \frac{10}{21}$

10 et 21 sont premiers entre eux, donc : $\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$.

Fiche d'exercice n°2

Exercice n°5 : Simplifier les fractions suivantes en utilisant la décomposition les nombres suivants en produits de facteurs premiers.

$$\frac{492}{410} \qquad \frac{780}{330} \qquad \frac{690}{798} \qquad \frac{3850}{2275} \qquad \frac{8510}{9430}$$

Correction de l'exercice n°5 :

780	2
390	2
195	3
65	5
13	13
1	

330	2
165	3
55	5
11	11
1	

$330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$

$780 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13$

$$\frac{780}{330} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 13}{2 \times 3 \times 5 \times 11} = \frac{2 \times 13}{11} = \frac{26}{11}$$

690	2
345	3
115	5
23	23
1	

798	2
399	3
133	7
19	19
1	

$690 = 2 \times 3 \times 5 \times 23$ $\quad$ $798 = 2 \times 3 \times 7 \times 19$

$$\frac{690}{798} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 23}{2 \times 3 \times 7 \times 19} = \frac{5 \times 23}{7 \times 19} = \frac{115}{133}$$

492	2
246	2
123	3
41	41
1	

410	2
205	5
41	41
1	

$492 = 2 \times 2 \times 3 \times 41$ $\quad$ $410 = 2 \times 5 \times 41$

$$\frac{492}{410} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 41}{2 \times 5 \times 41} = \frac{2 \times 3}{5} = \frac{6}{5}$$

3850	2
1925	5
385	5
77	7
11	11
1	

2275	5
455	5
91	7
13	13
1	

$3850 = 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11$ $\quad$ $2275 = 5 \times 5 \times 7 \times 13$

$$\frac{3850}{2275} = \frac{2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11}{5 \times 5 \times 7 \times 13} = \frac{2 \times 11}{13} = \frac{22}{13}$$

8510	2
4255	5
851	23
37	37
1	

9430	2
4715	5
943	23
41	41
1	

$8510 = 2 \times 5 \times 23 \times 37$ $\quad$ $9430 = 2 \times 5 \times 23 \times 41$

$$\frac{8510}{9430} = \frac{2 \times 5 \times 23 \times 37}{2 \times 5 \times 23 \times 41} = \frac{37}{41}$$